Übungen zur Kostenfunktion – kompetenzorientiert

1) Eine Mini−Produktion von Topfpflanzen hat Fixkosten in der Höhe von 100€ pro Monat. Für 10 Stück der Produktion rechnet man mit 150€ Gesamtkosten, für 20 Stück mit 170€ und für 30 Stück mit 260€

i) − Begründen Sie, warum man mit diesen Angaben eine Kostenfunktion dritten Grades erstellen kann.

ii) − Stellen Sie das Gleichungssystem dafür auf.

iii) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten im Intervall [10;20] Stück.

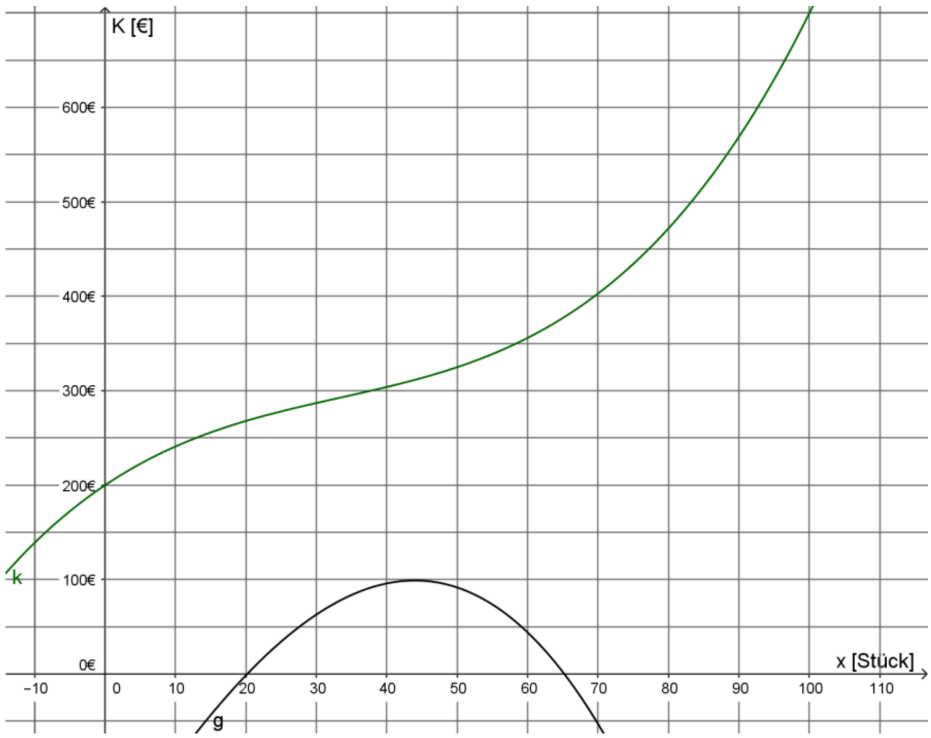
iv) – Bestimmen Sie an Hand einer Zeichnung der Kostenfunktion oder durch Rechnung diejenige Stelle, an der die Kostenfunktion die geringste Kostensteigerung hat.

v) – Geben Sie noch einen anderen Namen für diese Stelle an.

2) Eine Kostenfunktion und die Gewinnfunktion (darunter) einer Möbelfabrik ist in der unteren Grafik dargestellt.

i) – Lesen Sie aus der Grafik die Gewinngrenzen und den maximalen Gewinn ab.

ii) – Zeichnen Sie näherungsweise den Verlauf der Erlösfunktion dazu ein.



3) Die Kostenfunktion einer Schlüsselanhängerproduktion rechnet mit 3000€ Fixkosten, mit 3023€ Gesamtkosten bei 10 Stück Produktion und mit 3680€ Gesamtkosten bei 100 Stück der Produktion.

i) – Begründen Sie, warum man mit diesen Angaben nur eine quadratische Kostenfunktion erstellen kann.

ii) – Erstellen Sie den Term der quadratischen Kostenfunktion

iii) – Berechnen Sie mit der dazu ähnlichen Kostenfunktion $K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 3000$ die Stückkostenfunktion und das Minimum der Stückkosten.

iv) – Geben Sie an, was das Minimum der Stückkosten mit der langfristigen Preisuntergrenze des Marktpreises zu tun hat.

4) Eine Firma hat die Kostenfunktion $K(x) = 4x^3 - 60x^2 + 400x + 1000$ *[x in Stück und K(x) in €]* und kann den Marktpreis aus der Funktion $p(x) = 800 - 40x$ und der Absatzmenge x berechnen.

i) – Geben Sie an, welche Fixkosten der Betrieb hat

ii) – Berechnen Sie, wir groß die Gesamtkosten bei 20 Stück Produktion sind.

iii) – Erklären Sie, wie Sie die momentane Kostensteigerung bei x=20 Stück exakt und näherungsweise berechnen.

iv) – Überprüfen Sie, ob der BEP (=untere Gewinngrenze) bei x=2,4 Stück liegt.

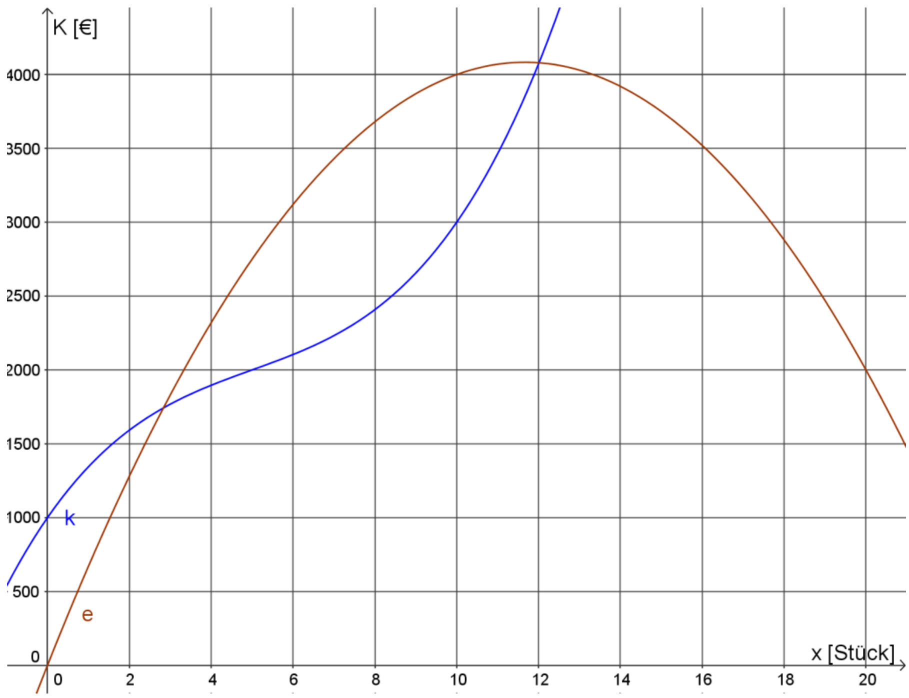
v) – Dokumentieren Sie, wie Sie die obere Gewinngrenze berechnen.

5) Gegeben sind die Erlös− und Kostenfunktion einer Firma aus der IT−Branche.

i) – Erklären Sie, welchen Funktionstyp die beiden Funktionen haben

ii) – Bestimmen Sie die Gewinngrenzen aus der Grafik

iii) – Zeichnen Sie die Gewinnfunktion näherungsweise in die Grafik ein



6) Im Bereich [0;400] Stück arbeitet die Quaxi−Firma mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}12x^2 + 13x + 2000$. Die Firma weiß noch nicht, ob der Marktpreis p=10€/Stück oder p=20€/Stück zu einem Gewinn führt.

i) – Zeichnen Sie Kosten− und Erlösfunktion zu beiden Preisen im Taschenrechner und entscheiden Sie, welcher Preis zu einem Gewinn führt und

ii) – Berechnen Sie mit dieser Erlösfunktion das Gewinnmaximum und die Stückzahl, bei der er erreicht wird.

7) i) – Erklären Sie, warum die mittlere Änderungsrate der Kostenfunktion kurz vor dem Wendepunkt größer ist als die momentane Änderungsrate beim Wendepunkt.
− Erklären Sie wie das mit den Begriffen progressiv und degressiv zusammenhängt.

ii) Überprüfen Sie das konkret am Beispiel $K(x) = 4x^3 - 60x^2 + 400x + 1000$ wie folgt:
− Berechnen Sie die momentane Änderungsrate beim Wendepunkt und die mittlere Änderungsrate im Intervall [3;4]

8) Eine Preisfunktion ist gegeben durch $p(x) = 100 - x$ *[x in Stück, p in €/Stück]*
Die Gewinnfunktion dieser Firma ist $G(x) = -x^2 + 50x - 200$

i) – Berechnen Sie den Term der Erlösfunktion

ii) – Berechnen Sie die Kostenfunktion daraus und geben Sie den Typ der Kostenfunktion an.

iii) − Bestimmen Sie die Gewinngrenzen und zeichnen Sie die Gewinnfunktion in diesem Intervall

9) Gegeben sind die Daten einer Kostenfunktion:

x [Stück]	2	5	8	10
K [€]	1268	1325	1472	1700

i) – **Zeichnen** Sie aus den Angaben der Tabelle die Kostenfunktion und ermitteln Sie näherungsweise die Fixkosten.

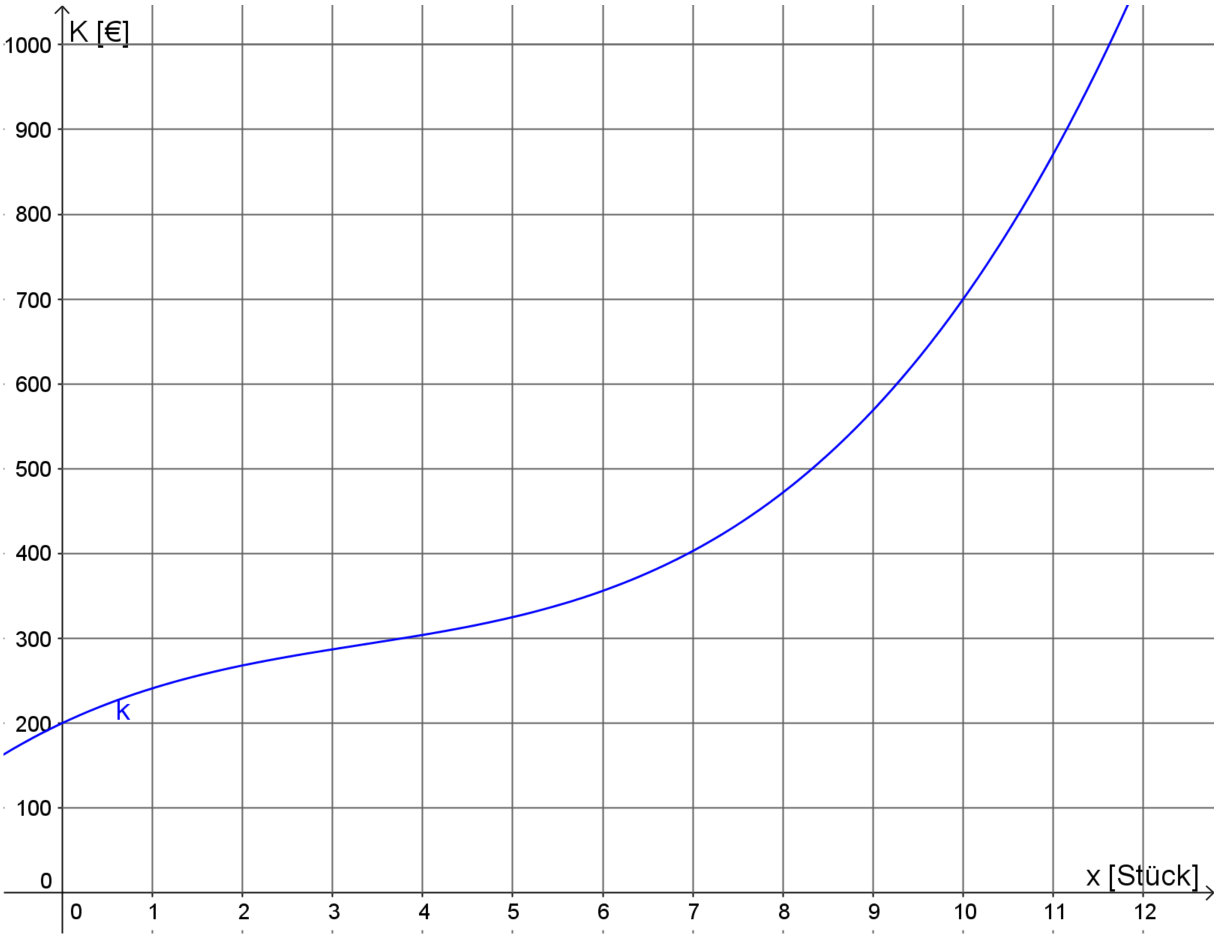
ii) − Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Kostenfunktion für x aus [2;10] Stück.

iii) − Bestimmen Sie die Stückkosten für x=8 Stück

iv) − Erklären Sie, warum die mittlere Änderungsrate wenig über den notwendigen Marktpreis aussagt, die Stückkosten hingegen schon.

v) – Ermitteln Sie den Term der kubischen Kostenfunktion zu diesen Daten.

10) Eine Kostenfunktion ist grafisch gegeben.



i) – Zeichnen Sie die Erlösfunktion bei einem Marktpreis von 80 € dazu ein.
ii) – Lesen Sie die Gewinngrenzen ab.
iii) − Zeichnen Sie eine 2. Erlösfunktion zu einem unbekannten Marktpreis ein, sodass diese die Kostenfunktion gerade berührt und lesen Sie den zugehörigen Marktpreis ab.
iv) – Interpretieren Sie die Situation dieser Firma (iii) in Bezug auf den zu erwarteten Gewinn.

11) Eine Firma arbeitet mit der Kostenfunktion $K(x) = x^3-9x^2+55x+1900$ und der Erlösfunktion $E(x) = 300x$ *[x in Stück und E, K in €]*
i) – Erstellen Sie die Gewinnfunktion.
ii) – Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
iii) − Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Lösungen:

1) i) Eine Funktion 3.Grades braucht für die 4 Parameter a,b,c,d vier Angaben. Die sind hier gegeben.

ii) $K(x) = ax^3+bx^2+cx+d = y$

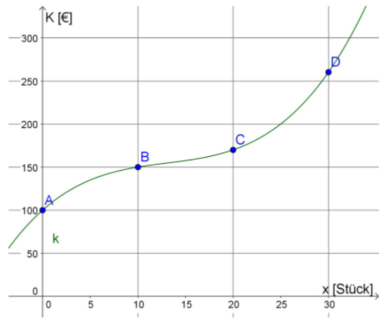
$K(0) = 100 \Rightarrow$ $\mathbf{a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d = 100}$

$K(10) = 10 \Rightarrow$ $\mathbf{a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d = 150}$

$K(20)=170 \Rightarrow$ $\mathbf{a\cdot 20^3+b\cdot 20^2+c\cdot 20+d = 170}$

$K(30)=260 \Rightarrow$ $\mathbf{a\cdot 30^3+b\cdot 30^2+c\cdot 30+d = 260}$ ($\Rightarrow$ $K(x) = 0{,}01667\,x^3-0{,}65x^2+9{,}8333x+100$)

iii) $mÄR[10;20] = \frac{K(20)-K(10)}{20-10} = \frac{170-150}{10}$ **= 2 €/Stück**



iv) Rechnung:

$K'(x) = 0{,}05x^2-1{,}3x+9{,}8333$

$K''(x) = 0{,}1x-1{,}3$

$0 = 0{,}1x-1{,}3 \Rightarrow x= 13$ Stück

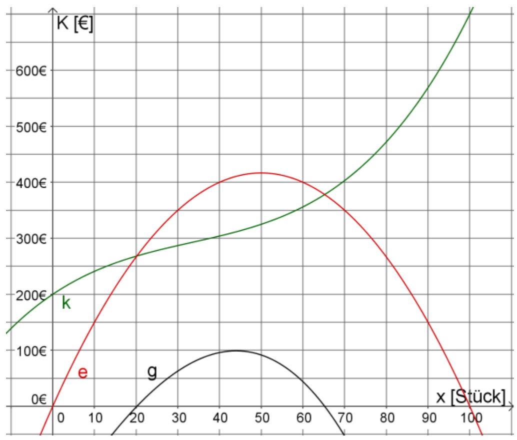
Bei 13 Stück hat die Kostenfunktion die geringste Kostensteigerung

v) Übergangsstelle von degressivem zu progressivem Kostenverlauf = Wendepunkt

2) i) Gewinngrenzen: [20;65] Stück

maximaler Gewinn 100 €

ii) ➔



3) i) Für eine Kostenfunktion 2. Grades braucht man genau 3 Angaben für a,b,c.

ii) $K(x) = ax^2+bx+c$

$K(0) = 3000$

$K(10) = 3023$

$K(100) = 3680 \Rightarrow$ $\mathbf{K(x) = 0{,}05x^2+1{,}8x+3000}$

iii) $\overline{K}(x)= 0{,}05x+2+3000x^{-1}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}05 - 3000x^{-2}$

$0 = 0{,}05 - 3000\,x^{-2} \quad |\cdot x^2$

$0 = 0{,}05x^2 - 3000 \Rightarrow x=244{,}95$ Stück

$\overline{K}(244{,}95) = 26{,}49$ €/Stück sind die minimalen Stückkosten

iv) Die langfristige Preisuntergrenze für ein Unternehmen ist gleich dem Minimum der Stückkosten. Fällt der Marktpreis darunter, kann die Firma langfristig nicht überleben, da dann der Gewinn zum Verlust wird.

4) i) Fixkosten = 1000 GE

ii) $K(20) = 17000$ GE

iii) exakt: $K'(20)$ näherungsweise als mittlere Änderungsrate: $\frac{K(21)-K(19)}{21-19}$

iv) $G(x) = -4x^3+20x^2+400x-1000$

o setzen ➔ GLG3: 2,353 = Untere Gewinngrenze

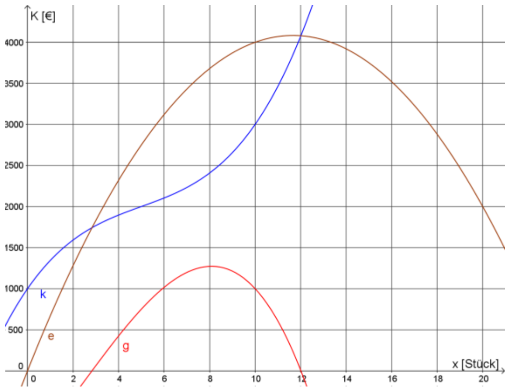
11,714 = Obere Gewinngrenze

− 9,068 = unbedeutend

5) i) Kostenfunktion: kubisch   Erlösfunktion: quadratisch

ii) Gewinngrenzen [2,5; 12] Stück

iii) ➔



6) i) nur 20€ führt zu Gewinn

ii) grafisch: $\boxed{\text{Y=}}$ 20x−(0.0004X^3−0.12X^2+13X+2000)

$\boxed{\text{WINDOW}}$ Xmin = 0   Xmax = 400

$\boxed{\text{ZOOMFIT}}$

2nd $\boxed{\text{CALC}}$ 4:minimum

links vom Maximum: ENTER   rechts vom Maximum ENTER ENTER

x_{Gmax} = 225,83 Stück   Gmax = 1093,85 €

7) i) Der Wendepunkt der Kostenfunktion ist der Punkt mit dem minimalen Kostenanstieg. Daher ist vor dem Wendepunkt (und auch nachher) die Steigung größer (sowohl die momentane als auch die mittlere). Die Steigung der Kostenfunktion ist vor dem Wendepunkt immer schwächer werdend (degressiv) und nach dem Wendepunkt immer stärker werdend (progressiv).

ii) $K(x) = 4x^3 - 60x^2 + 400x + 1000$

$K'(x) = 12x^3 - 120x + 400$

$K''(x) = 24x - 120$

$0 = 24x - 120$ ➔ x=5 ME Wendestelle

$K'(5) = 100$ GE/ME = minimale Kostensteigerung pro ME beim Wendepunkt

mÄR[3;4] = $\frac{K(4)-K(3)}{4-3} = \frac{1896-1768}{1} = 128$ GE/ME

8) i) $E(x) = 100x - x^2$

ii) $G(x) = E(x) - K(x)$ ➔ $K(x) = E(x) - G(x)$

$K(x) = 100x - x^2 - (-x^2 + 50x - 200)$

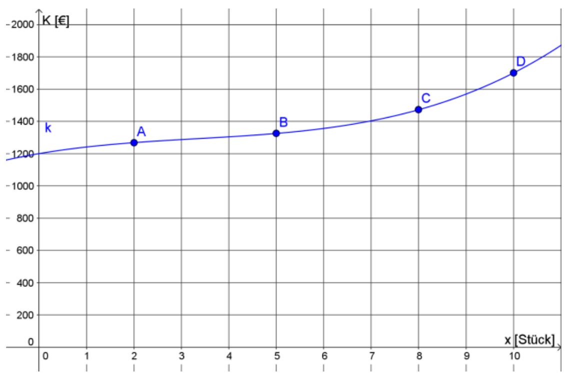
$K(x) = 50x + 200$ ist linear

iii) Gewinngrenzen: $-x^2 + 50x - 200 = 0$

➔ [4,38; 45,61] Stück

➔ Gewinnfunktion

9)



i) Fixkosten ≈ 1200€

ii) mÄR[2;10] = $\frac{1700-1268}{10-2} = 54$ €/Stück

iii) $\overline{K}(x) = x^2 - 10x + 50 + 1200x^{-1}$

$\overline{K}(8) = 184$ Stück

(oder 1472/8 = 184 Stück)

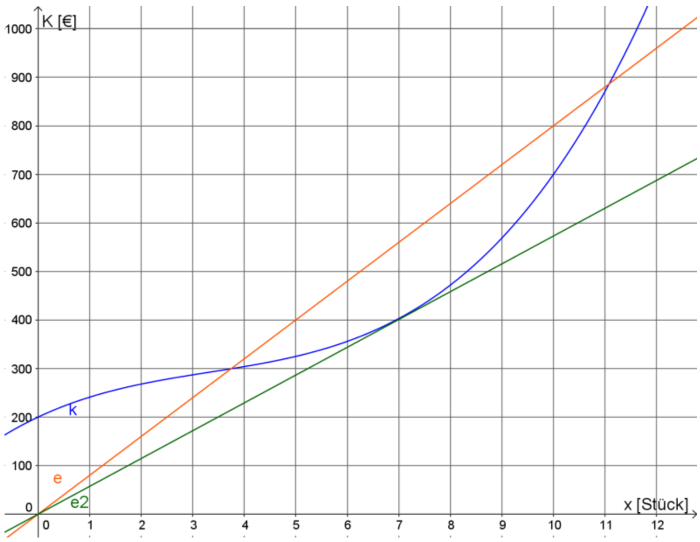
iv) Die Stückkosten beinhalten auch den Fixkostenanteil, die mittlere Änderungsrate aber nicht, sie gibt nur die variablen Produktionskosten gemittelt an.

9)v) mit Regression:
STAT Edit

L1	L2
2	1268
5	1325
8	1472
10	1700

STAT CALC 6: CubicReg L1,L2 ➔ **$K(x) = 1x^3-10x^2+50x+1200$**

10) i) ➔



ii) Gewinngrenzen: [4;11] Stück

iii) ➔

Marktpreis ist ca. 57€

iv) Gewinn ist bei dieser Firma Null, wenn 7 Stück produziert werden, sonst negativ

11) i) $G(x) = -x^3+9x^2+245x-1900$

ii) $G(x) = 0$ ➔ Gewinngrenzen: [7,39; 16,84] Stück

iii) $G'(x) = -3x^2+18x+245 = 0$ ➔ $x = 12{,}52$ Stück ➔ **Gmax = 615,64 €**